

Seminarfacharbeit im Seminarfach Astronomie

über das Thema:

Die Kosmologische Konstante Einsteins größte Eselei?

vorgelegt von:

Justus Vonstrohe

Fachlehrer:

Florian Riemer

Abgabedatum:

5. März 2026

Ursprüngliches Abgabedatum:

3. März 2026

Abgabedatum angepasst durch
Oberstufenkoordinator Daniel Sieverding
im Rahmen einer
schulischen Veranstaltung

„Es gibt eine Theorie, die besagt, wenn jemals irgendwer genau rausfindet, wozu das Universum da ist und warum es da ist, dann verschwindet es auf der Stelle und wird durch etwas noch Bizzarreres und Unbegreiflicheres ersetzt. Es gibt eine andere Theorie, nach der das schon passiert ist.“

*– Ein Restaurant am Ende des Universums
(Per Anhalter durch die Galaxis, Band 2)*

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Einführung der Kosmologischen Konstante Λ	3
2.1	Grundlagen zur Gravitation	3
2.2	Statisches Universum	3
2.3	Instabilität	4
3	Rückzug der Kosmologischen Konstante	4
3.1	Expansion	4
3.2	Die 1. Friedmann-Gleichung	5
3.3	Raumgeometrien	6
3.4	Kosmologische Modelle	7
4	Wiederkehr der Kosmologischen Konstante	12
4.1	Beschleunigte Expansion	12
4.2	Zusammensetzung des Dichteparameters	13
4.3	Dunkle Energie	14
5	Das Kosmologische Konstantenproblem und offene Fragen	16
5.1	Vakuumenergie	16
5.2	Mögliche Lösungsansätze	17
5.2.1	Quintessenz	17
5.2.2	Modifizierte Gravitation	17
5.2.3	Multiversum	18
6	Fazit und Ausblick	19
7	Anhang	20
7.1	Konstanten- und Formelregister	20
7.2	Schreibweisen	20
7.3	Klarstellung der Expansionsgeschwindigkeiten	21
7.4	Vollständige Herleitung der 1. Friedmann-Gleichung	22
7.4.1	Ein Kugelmodell	22
7.4.2	Energieerhaltung im Kugeluniversum	23
7.4.3	Herleitung des Lambda-Terms	23
7.4.4	Λ -Term in Energiegleichung	25
7.5	Kurze Herleitung der 2. Friedmann-Gleichung	26
7.6	Die Speziallösung des Kosmos: Das de-Sitter-Modell	27
7.7	Literaturverzeichnis	28
7.7.1	Analoge Quellen	28
7.7.2	Digitale Quellen	28
7.7.3	Quellen aus Nutzung generativer künstlicher Intelligenz	30
7.8	Abbildungsverzeichnis	31

1 Einleitung

Wohl kaum eine Entdeckung in der Geschichte der Physik durchlief - trotz ihres durchaus langweilig anmutenden Namens - eine so dramatische Wandlung wie die kosmologische Konstante Λ . Von Albert Einstein als „größte Eselei“ seines Lebens titulierte, bildet sie heute das Rückgrat der modernen Kosmologie und war ganz nebenbei die Ursache gleich mehrerer Revolutionen der kosmischen Denkweise. Doch was verbirgt sich hinter dem griechischen Buchstaben Lambda?

Ursprünglich als mathematisches Hilfsmittel eingeführt, um ein statisches Universum zu erzwingen, wurde die kosmologische Konstante nach der Entdeckung der Expansion verworfen, nur um Jahrzehnte später als Triebkraft der dunklen Energie zurückzukehren. Heute weiß zwar fast jeder von der Expansion des Universums, als würde es nicht jetzt schon jegliche Vorstellungskraft übersteigen. Dabei wissen wir von knapp 95 % der Dinge in eben diesem Universum nicht einmal, was sie bedeuten. An den Kontinentischen der Astrophysikerkonferenzen sorgt dies wahrscheinlich für rauchende Köpfe.

Diese Entwicklungen werden in dieser auf 15 Seiten beschränkten Facharbeit als roter Faden dienen. Es sei gesagt, dass dieses Thema einen hohen Komplexitätsgrad aufweist. Das methodische Vorgehen besteht deswegen darin, dieses recht abstrakte Thema hauptsächlich mathematisch mit stark vereinfachten Darstellungen anschaulich zu erklären.

Hinweis: Alle blau hinterlegten Objekte sind klickbar und führen zu ihrer Erklärung. Es bietet sich daher an, diese Facharbeit digital zu lesen. Im Anhang findet sich unter [7.2](#) eine Klarstellung von Schreibweisen.

2 Einführung der Kosmologischen Konstante Λ

2.1 Grundlagen zur Gravitation

Nahezu jede Facharbeit zum Thema Kosmologie beschäftigt sich in irgendeiner Form mit Gravitation, einer fundamentalen Wechselwirkung zwischen Massen. Die erste Möglichkeit, eine anziehende Kraft zwischen zwei Massen zu bestimmen, war das Newton'sche Gravitationsgesetz:

$$F_{grav} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

Dabei ist F_{grav} die Kraft zwischen den beiden Massen m und M bei einem bestimmten Abstand r und G die **Newton'sche Gravitationskonstante** (vgl. [1]).

Diese Formel behielt über zwei Jahrhunderte hinweg ihre Gültigkeit und beschreibt auch heute noch viele astrophysikalische Phänomene, bevor die Gravitation durch Albert Einstein in seiner 1915 erschienenen Allgemeinen Relativitätstheorie neu interpretiert wurde: Seine Vorstellung von Gravitation beruht auf der von ihm eingeführten Raumzeit, einem vierdimensionalen Kontinuum, bestehend aus den drei räumlichen und der einen Zeitdimension, in der Massen die Raumzeit krümmen und sich frei bewegende Körper entlang dieser Krümmungen bewegen.

Eine gemeinsame Wirkung, die beide Theorien jedoch haben: *Gravitation wirkt anziehend* (vgl. [2]).

2.2 Statisches Universum

Dieser Umstand brachte ein entscheidendes Problem mit sich, als Albert Einstein 1917 seine Theorie auch auf den ganzen Kosmos bezog. Zu dieser Zeit herrschte das Weltbild vor, das Universum sei statisch - es sollte sich weder ausdehnen noch zusammenziehen. Nun erkannte Einstein aber, dass durch die anziehende Wirkung der Gravitation das Universum eigentlich kollabieren¹ oder expandieren² müsste³ (vgl. [3]). Er führte deswegen ad-hoc⁴ in seine Feldgleichungen einen weiteren Term ein, der eben dieser Wirkung entgegenstehen sollte: **Die kosmologische Konstante Λ** (vgl. [5]).

Seine Feldgleichungen nahmen so diese Form an:

$$\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

Es ist dabei nicht wichtig zu verstehen, was die einzelnen Terme genau bedeuten. Es handelt sich um sogenannte Tensoren, Systeme vieler Matrizen und Vektoren, die die komplexen Felder der Relativitätstheorie darstellen können (vgl. [6], S. 21ff, 53ff). Auf der linken Seite stellt der Energie-Impuls-Tensor

¹kontrahieren, zusammenziehen

²ausdehnen

³Mit der Gravitation als anziehende Kraft ist dies zwar intuitiv, aber nicht formal korrekt. In Abschnitt 3.2 wird erklärt wieso ein Kosmos ohne Λ zwingend dynamisch ist.

⁴spontane „Handlung [...], die speziell für einen Zweck entworfen wurde!“ [4]

$T_{\mu\nu}$ multipliziert mit der Einsteinschen Gravitationskonstante $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ die Dichte und den Fluss von Energie an jedem Punkt der Raumzeit dar (vgl. [7]). Auf der rechten Seite wird mit dem Einstein-Tensor $G_{\mu\nu}$ die durch die Energie auf der linken Seite entstehende Krümmung der Raumzeit ausgedrückt, und mit der kosmologischen Konstante eine weitere Energieform der Raumzeit selbst eingeführt. Λ wird hier mit dem metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ multipliziert, damit sie dieselbe geometrische Struktur wie die anderen Terme besitzt (vgl. [8]).

Die **kosmologische Konstante** selbst weist, wie alle anderen Terme, die **Dimension** $[L^{-2}] = \frac{1}{m^2}$ auf, was neben dem Einstein-Tensor als zweites Maß für die Krümmung der Raumzeit pro Fläche verstanden wird (vgl. [9]). Je größer Λ , desto stärker wirkt sie als „antigravitative“ Kraft, die der anziehenden Wirkung der Materie als Ausgleichsterm entgegensteht und so das Universum stabilisieren könnte (vgl. [5]). Wie Kraft und Krümmung einander bedingen wird genauer in Abschnitt 3.3 erklärt.

2.3 Instabilität

Einstein legte 1917 noch keinen genauen Wert für Λ fest⁵. Ihm fehlten Daten über die Gesamtdichte des Universums ρ oder dessen Radius R . Damit das Universum statisch bleibt, müsste der Wert von Λ exakt und ohne die geringste Abweichung die anziehende Gravitation der Materie kompensieren. Er legte deswegen fest:

$$\Lambda = \frac{4\pi G\rho}{c^2} = \frac{1}{R^2} (\approx 1,1 \times 10^{-52} \frac{1}{m^2})^{6,7}$$

Mathematisch war so ein kosmisches Gleichgewicht möglich, tatsächlich gleicht dieser Zustand eher einem Bleistift, der auf der Spitze steht (vgl. [10], Prompt E). In einem realen Kosmos ist Materie nicht perfekt glatt verteilt. Kleinste lokale Verdichtungen würden dazu führen, dass die Gravitation in diesem Bereich die Oberhand gewinnt und ein Kollaps unwiderruflich beginnt.

3 Rückzug der Kosmologischen Konstante

3.1 Expansion

Dieses Problem erkannten mehrere Astronomen im Verlauf der folgenden 20 Jahre. Einer von ihnen war Edwin Hubble, dem 1929 eine bahnbrechende Entdeckung gelang (vgl. [11]). Durch die Analyse der Rotverschiebungen unterschiedlich weit entfernter Objekte⁸ erkannte er: *Das Universum expandiert* (vgl. [12]). Was folgte, waren Jahre geprägt von einem neuen Weltbild des Universums, das auch mit der Verwerfung der kosmologischen Konstante selbst

⁵In Abschnitt 3.4 unter Punkt 1 (Einstein-Kosmos) wird dieser Wert noch relevant werden.

⁶Den genauen Wert kannte Einstein noch nicht.

⁷Die Proportionalität von $\Lambda \propto \frac{1}{R^2}$ wird auch als Koinzidenzproblem beschrieben, da Λ eine Konstante ist und R zeitabhängig.

⁸*Hinweis: stark vereinfacht.* Die Erkenntnis lag darin, dass die Wellenlängen von entfernten Objekten in den langwelligen, roten Bereich des Lichtspektrums „rotverschoben“ werden. Dies war nur möglich, wenn sich das Universum ausbreitet, da sonst das Licht seine eigentliche Wellenlänge behalten würde (vgl. [10], Prompt A).

einherkam (vgl. [13]).

Doch was bedeutet diese besagte „Expansion“ eigentlich und was hat die kosmologische Konstante damit zu tun?

Um ein solch abstraktes Konzept anschaulich zu erklären, kann sich das Universum als ein Ballon vorgestellt werden. Wenn man diesen „kosmischen Ballon“ nun aufbläst, so bewegen sich alle Punkte auf der Oberfläche des Ballons voneinander weg. Auf kosmischer Skala bewegen sich Galaxien auch nicht durch den Raum, sondern Raum „entsteht“ buchstäblich zwischen ihnen⁹.

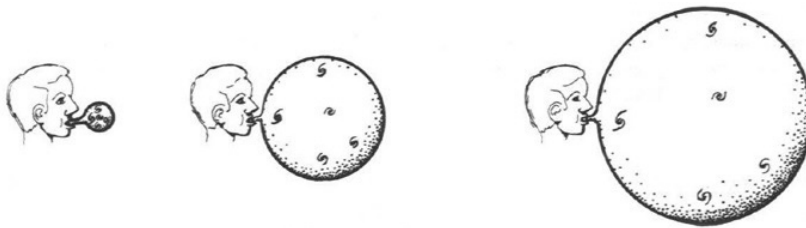


Abbildung 1: Ballon-Modell des Universums

3.2 Die 1. Friedmann-Gleichung

Der russische Physiker und Kosmologe Alexander A. Friedmann interpretierte die einstein'schen Feldgleichungen bereits 1922 mit der Möglichkeit, dass das Universum nicht statisch sein könnte. Anhand der - nach ihm benannten - ersten Friedmann-Gleichung lässt sich die Expansion des Universums in Abhängigkeit der Dichte ρ , der Raumkrümmung k und der kosmologischen Konstante Λ hervorragend erklären (vgl. [14]).

Wir schrumpfen dafür das Universum auf eine uns vorstellbare Größe herunter und stellen es uns als eine dreidimensionale Kugel vor. Jede Länge in dieser Kugel wird mit dem Skalenfaktor in Abhängigkeit von der Zeit $a(t)$ repräsentiert. Die Änderung dieser Länge ist entsprechend gegeben durch die erste Ableitung des Skalenfaktors $\dot{a}$. Unter der Annahme des kosmologischen Prinzips, dass das Universum homogen und isotrop ist¹⁰, lässt sich dieses Modell wieder auf den Kosmos übertragen¹¹. Für die Änderungsrate pro Skalenfaktor $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)$ ergibt sich die Gleichung:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Heute wird die Geschwindigkeit der Ausbreitung des Universums auch **Hubble-Parameter** genannt. Die aktuell gemessene Geschwindigkeit, wie schnell

⁹Dieses zweidimensionale Beispiel dient lediglich der Veranschaulichung, da das Universum vierdimensional ist.

¹⁰*Kosmologisches Prinzip*: Es gilt, dass die Masse des Universums überall gleichmäßig verteilt ist (Homogenität) und dass das Universum auf großen Skalen überall die gleichen Strukturen aufweist und keine bevorzugten Richtungen hat (Isotropie).

¹¹Die vollständige und deutlich einfacher nachzuvollziehende Herleitung der Gleichung findet sich im Anhang unter 7.4.

sich der Raum pro Megaparsec¹² ausdehnt, beläuft sich auf $H_0 \simeq 67 - 76 \frac{km}{s \cdot Mpc}$ (vgl. [15]). Um jedoch zu verstehen, wie dieser Parameter zustande kommt, müssen die oben genannten Faktoren (ρ, k, Λ) erst einmal einzeln betrachtet werden.

3.3 Raumgeometrien

Aufmerksamen Leser:innen ist möglicherweise bereits aufgefallen, dass die Krümmung k etwas mit dem Verhalten des Universums zu tun hat. Die Krümmung ist ein vierdimensionales Konzept, was leider für uns dreidimensionale Wesen schwer zu visualisieren ist. Als Analogie kann man diese Krümmung auch auf einfachere Zusammenhänge beziehen (vgl. [16]). Das Universum kann auf verschiedene Arten gekrümmt sein. Wie die verschiedenen Krümmungen aussehen, wird im Folgenden erläutert:

Nach den [Grundlagen der Gravitation nach Albert Einstein](#) krümmt Masse die Raumzeit. Auf großem Niveau ist die Gesamtmasse des Universums relevant. Insgesamt ist die Krümmung definiert als das Verhältnis der Dichte des Universums ρ zur „kritischen Dichte“ ρ_{crit} . Die kritische Dichte ist genau die Dichte, die das Universum haben müsste, um Flach zu sein ($k = 0$) (vgl. [17]). Man erhält sie, indem man in der ersten Friedmann-Gleichung von oben den Krümmungsparameter $k = 0$ setzt¹³ (vgl. [18] S. 216):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \\ H^2 &\Rightarrow \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{(0)c^2}{a^2} + \frac{(0)c^2}{3} \\ H^2 &= \frac{8\pi G\rho}{3} \\ \frac{3H^2}{8\pi G} &= \rho_{crit} \end{aligned}$$

Mit den aktuellen [Schätzungen des Hubble-Parameters](#) bekommt die kritische Dichte somit einen ungefähren Wert von $\rho_{crit} = 9,20 \times 10^{-30} \frac{g}{cm^3}$ (vgl. [19]).

Die Krümmung des Raumes wird wegen dieses Zusammenhangs meistens mit dem ebenfalls dimensionslosen¹⁴ Dichteparameter Ω beschrieben:

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}}$$

Je nachdem, wie die Dichte des Universums ist, werden verschiedene Krümmungen hervorgerufen (vgl. [20], S. 316)¹⁵:

¹² $1Mpc = 3,086 \times 10^{22}m$

¹³ In der obigen Form enthält die erste Friedmann-Gleichung die kosmologische Konstante. Zur Ermittlung der kritischen Dichte wird ebenfalls $\Lambda = 0$ gesetzt.

¹⁴ Krümmung und Dichteparameter haben keine Einheiten.

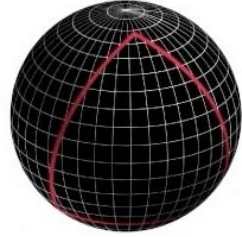
¹⁵ Der genaue Zusammenhang zwischen k und Ω ist gegeben als $\Omega = 1 + \frac{k \cdot c^2}{a^2 \cdot H_0^2}$ (vgl. [17]). Im Rahmen dieser Facharbeit reichen aber die folgenden Zusammenhänge.

1. Geschlossenes Universum: $k = +1$

In diesem Fall ist die Dichte größer als die kritische Dichte:

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}} > 1$$

Wenn man sich das Universum zweidimensional vorstellt, so hätte es die Form einer Kugel¹⁶. Auf der Oberfläche einer solchen Kugel wäre die Innenwinkelsumme eines Dreiecks auf großen Skalen $\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$.

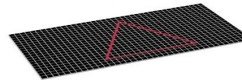


2. Flaches Universum: $k = 0$

Wie oben erwähnt ist das Universum flach, wenn die Dichte genau der kritischen Dichte entspricht:

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}} = 1$$

Zweidimensional wäre dieses Universum buchstäblich flach und die Innenwinkelsumme eines Dreiecks $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.



3. Offenes Universum: $k = -1$

Eine negative Krümmung wird erzwungen, wenn die Dichte geringer ist als die kritische Dichte:

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}} < 1$$

Diese Geometrie des Universums ist die wohl am schwersten Darzustellende und lässt sich am besten als sattelförmig (hyperbolisch) beschreiben, in welcher $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$ ist.

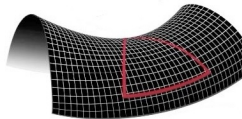


Abbildung 2:
Geometrien des
Universums

3.4 Kosmologische Modelle

Mit diesen drei Optionen für ein mögliches Krümmungsverhalten werden nun verschiedene Modelle des Kosmos untersucht¹⁷. Die Raumzeitkrümmung kann sich zwar per Definition über die zeitabhängige Dichte ebenfalls mit der Zeit verändern, im Rahmen dieser Facharbeit wird sie aber als konstant angesehen.

Wie damit bereits indirekt erwähnt wurde, ist bei konstanter Materiemenge auf variierbarem großem Raum die Dichte zeitabhängig. Durch Einsetzen der Volumenabhängigkeit der Dichte $\rho(t) = \frac{\rho_0}{a^3}$ und bei konstanter kosmologischer

¹⁶es ist „sphärisch“

¹⁷Aufgrund des Platzmangels werden Modelle wie der „Big Bounce“ nicht betrachtet, weil sie nichts mit der kosmologischen Konstante zu tun haben. Dafür fanden sie Anklang in der Popkultur (vgl. [21]).

Konstante Λ - der Name hat ja schließlich einen Grund - lässt sich die erste Friedmann-Gleichung mit allen Termen im Verhältnis zum Skalenfaktor aufstellen und nach der quadratischen Änderungsrate umformen¹⁸:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \cdot \frac{\rho_0}{a^3} - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \\ \dot{a}^2 &= \underbrace{\frac{8\pi G}{3} \cdot \frac{\rho_0}{a}}_{\text{I}} - \underbrace{kc^2}_{\text{II}} + \underbrace{\frac{\Lambda c^2 a^2}{3}}_{\text{III}} \end{aligned}$$

Der gravitative Wirkungsgrad durch die Dichte (I) nimmt also mit größer werdendem Universum ab, der Wirkungsgrad der Krümmung (II) bleibt konstant und der der kosmologischen Konstante (III) nimmt mit Erhöhung des Skalenfaktors sogar zu.

Stark vereinfacht kam es durch den Urknall zu einer anfänglichen Veränderung des Skalenfaktors. Da die Expansion bis heute besteht, schauen wir uns das Grenzverhalten der Expansion in verschiedenen kosmologischen Modellen an, je größer der Skalenfaktor wird:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{8\pi G}{3} \cdot \frac{\rho_0}{a} - kc^2 + \frac{\Lambda c^2 a^2}{3} = [\dots]$$

1. **Einstein-Kosmos:** $k = 0$, $\Lambda = \Lambda_{crit}$

Einstein ging von einem Universum ohne Krümmung und einer kosmologischen Konstante aus, die das Universum statisch halten sollte. Der Grad, wie präzise der Wert dieser „Konstante“ sein muss, wird klar, weil der Dichteterm genau ausgeglichen werden muss¹⁹. Nur kleine Ungleichgewichte und Schwankungen sorgen für einen Kollaps des fragilen Systems²⁰ (vgl. [22]):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \cdot \frac{\rho_0}{a^3} + \frac{\Lambda_{crit} c^2}{3} = 0$$

Dieses Modell ist nicht zuletzt aus diesem Grund zum Verstehen des Kosmos irrelevant.

2. **Lemaître-Kosmos:** $k = 1$, $\Lambda = \Lambda_{crit} \times (1 + \epsilon)$

Der belgische Priester und Kosmologe Georges Lemaître befasste sich 1929 in seinem Modell ebenfalls mit der „kritischen kosmologischen Konstante“ Λ_{crit} . Er glaubte zwar nicht, dass das Universum statisch sei, aber Beobachtungen allein anhand der Expansion zeigten, dass das Universum zu jung sein müsste, als dass sich jemals Sterne, geschweige denn Galaxien hätten formen können (vgl. [20], S. 316).

¹⁸ ρ_0 ist die Dichte zum aktuellen Zeitpunkt.

¹⁹Relativistisch mit den Tensoren der ART gerechnet, würde sich hier $\Lambda_{crit} = \frac{4}{(\kappa M)^2}$. Dabei ist κ die Einstein'sche Gravitationskonstante und M die Gesamtmasse des Kosmos.

²⁰Da sich der Skalenfaktor eines statischen Universums nicht ändert, ist die Betrachtung des Grenzverhaltens nicht nötig.

Er glaubte deswegen, dass das Universum nach dem Urknall²¹ langsam expandierte (ρ überwiegt) und nach gewisser Zeit einen statischen Zustand erreicht: die „Hesitationsphase“ oder „Stagnation“, mit den sogenannten „Einstein-Punkt“, *hier*: R_E . Ab hier überwiegt die Wirkung der kosmologischen Konstante und es kommt zu einer exponentiellen Expansion bis auf unendliche Größe (vgl. [23]). Λ wurde deswegen nur um einen minimalen Grad ϵ größer als Λ_{crit} gewählt (vgl. [22]):

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{8\pi G}{3} \cdot \frac{\rho_0}{a} - (0) \cdot c^2 + \frac{\Lambda_{crit} c^2 a^2}{3} = \infty$$

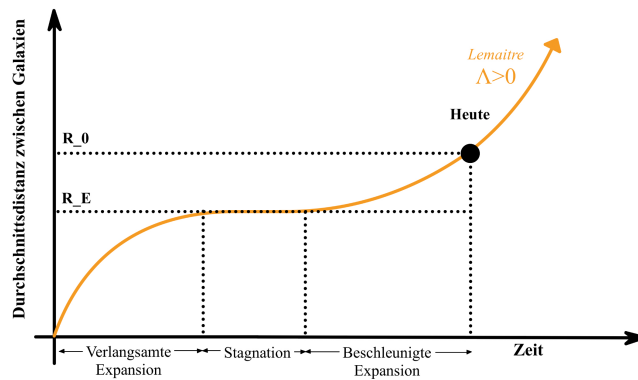


Abbildung 3: Entwicklung des Lemaître-Kosmos

Lemaîtres Überlegungen zum Urknall waren bahnbrechend für die damalige Zeit und prägten das kosmische Weltbild nachhaltig. Die Annahme, dass das Universum eigentlich zu jung sei, um komplexere galaktische Strukturen zu formen, wurde später widerlegt.

3. Erstes Friedmann-Modell: $k = -1$ bzw. $\Omega < 1$, $\Lambda = 0$

Anhand der drei Friedmann-Modelle lässt sich die Entwicklung des Universums sehr gut visualisieren. Sie unterscheiden sich nur in der gewählten Krümmung, da in allen drei Fällen die kosmologische Konstante $\Lambda = 0$ gesetzt wird.

Im ersten dieser Modelle ist die Annahme, das Universum sei negativ gekrümmt. Also ergibt sich:

$$\begin{aligned} \dot{a}^2 &= \frac{8\pi G}{3} \cdot \frac{\rho_0}{a} - (-1) \cdot c^2 + \frac{(0) \cdot c^2 \cdot a^2}{3} \\ &\Rightarrow \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{8\pi G}{3} \cdot \frac{\rho_0}{a} + c^2 = c^2 \end{aligned}$$

Die Gravitation ist zu schwach, um das System zusammenzuhalten. Die Fernwirkung wird immer geringer, je weiter die Expansion voranschreitet.

²¹Es sei gesagt, dass Georges Lemaître der Erste war, der dieses Konzept erforschte.

Zwar wird die Bedeutung der Dichtewirkung mit der Zeit belanglos, da $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{8\pi G}{3} \cdot \frac{\rho_0}{a} = 0$, das Universum wird sich aber mit einer Geschwindigkeit proportional zur Lichtgeschwindigkeit²² immer weiter ausdehnen. [Modell in Abb. 4 grün].

4. **Zweites Friedmann-Modell:** $k = 0$ bzw. $\Omega < 1$, $\Lambda = 0$ (auch Einstein-de-Sitter-Kosmos genannt)

Bei diesem Modell sei das Universum nicht gekrümmt. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\dot{a}^2 &= \frac{8\pi G}{3} \cdot \frac{\rho_0}{a} - (0) \cdot c^2 + \frac{(0) \cdot c^2 \cdot a^2}{3} \\ \Rightarrow \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{8\pi G}{3} \cdot \frac{\rho_0}{a} &= 0\end{aligned}$$

In diesem Fall wirkt nur noch der erste Term expansiv. Je größer jedoch a wird, desto kleiner wird diese Wirkung. Entsprechend geht die Expansionsrate gegen 0: Das Universum hört irgendwann de facto auf zu expandieren²³(vgl. [24]). [Modell in Abb. 4 blau].

5. **Drittes Friedmann-Modell:** $k = 1$ bzw. $\Omega > 1$, $\Lambda = 0$

In diesem positiv („sphärisch“) gekrümmten Kosmos gilt:

$$\begin{aligned}\dot{a}^2 &= \frac{8\pi G}{3} \cdot \frac{\rho_0}{a} - (+1) \cdot c^2 + \frac{(0) \cdot c^2 \cdot a^2}{3} \\ \Rightarrow \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{8\pi G}{3} \cdot \frac{\rho_0}{a} - c^2 &= -c^2\end{aligned}$$

In diesem Modell wirken die beiden Terme gegeneinander. Da der materieabhängige Dichteterm mit zunehmendem Skalenfaktor a abnimmt ($\propto \frac{1}{a}$), wird er zwangsläufig irgendwann den Wert der Konstante c^2 unterschreiten. An diesem Punkt wird $\dot{a}^2 = 0$. Das Universum erreicht seine maximale Ausdehnung und die Expansion stoppt (vgl. [24]). Da die Gravitation der Materie jedoch weiterhin anziehend wirkt, beginnt das Universum zu kontrahieren ($\dot{a}^2$ wird negativ²⁴). Im Gegensatz zu einem statischen Gleichgewicht führt die nun steigende Dichte bei schrumpfendem Skalenfaktor zu einer Beschleunigung des Kollapses. Das Universum stürzt unaufhaltsam in sich zusammen, was als „Big Crunch“ bezeichnet wird. Dies wäre auch im Lemaître-Universum ohne Λ der Fall (vgl. [22]). [3. Friedmann-Modell in Abb. 4 rot].

²²Wichtig: Nicht pro Skalenfaktor. Forscher sind sich noch uneins, ob die Expansion schneller sein kann als das Licht.

²³Theoretisch geht die Expansion natürlich weiter, sie wird aber irgendwann quasi unmessbar klein.

²⁴Deswegen darf mathematisch in diesem Beispiel auch reell ein Quadrat eine negative Lösung haben.

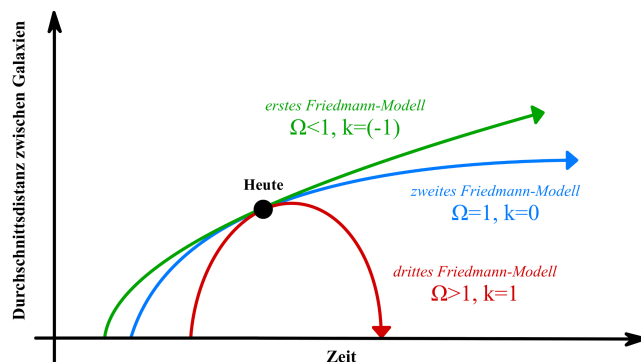


Abbildung 4: Entwicklung der Friedmann-Modelle

6. De-Sitter-Kosmos²⁵ (vgl. [22]).

In den drei Friedmann-Modellen wird der Umstand klar, wieso nach der Entdeckung der Expansion die kosmologische Konstante wieder verworfen wurde: **Sie war nicht mehr nötig**. Eine Expansion des Universums ist auch ohne kosmologische Konstante möglich. Ursprünglich war der Gedanke, wie im Einstein-Modell gezeigt, eh, dass sie die Expansion vermeiden sollte (vgl. [5]).

Das zweite friedmann'sche Modell, das Einstein-de-Sitter-Modell, ohne eine kosmologische Konstante, etablierte sich von nun an als Standardmodell zur Beschreibung des Kosmos.

Zwar sollte es eine Weile dauern, bis sich die kanonische Exklusion²⁶ durchsetzen konnte (vgl. [25], S. 114); Einstein selbst beschrieb die kosmologische Konstante aber bereits in privaten Gesprächen mit dem Physiker George Gamow angeblich als die „Größte Eselei seines Lebens“ (vgl. [26]).

Albert Einstein verpasste so möglicherweise seinen größten Triumph. Er hätte die Expansion des Universums bereits 1905 vorhersagen können, hielt aber an seinem wortwörtlich statischen Weltbild fest. In der Annahme, die kosmologische Konstante sei der größte Fehler seines Lebens gewesen, verstarb Albert Einstein im Jahr 1955 (vgl. [27], min. 1:50ff).

²⁵Ein kosmologischer Sonderfall ist das de-Sitter-Modell. Es ist zur Betrachtung des Kosmos heutzutage ebenfalls irrelevant, wird aber im Anhang unter 7.6 wegen seiner historischen Signifikanz und Besonderheiten separat beleuchtet.

²⁶Exklusion aus dem Kanon der Wissenschaft

4 Wiederkehr der Kosmologischen Konstante

Die Facharbeit hätte an dieser Stelle vorbei sein können: Wir leben in einem Kosmos mit bremsender Expansion. Doch wie so häufig kamen neue Entdeckungen auf die wissenschaftliche Allgemeinheit zu, die auch der kosmologischen Konstante eine Rückkehr ermöglichten.

4.1 Beschleunigte Expansion

1998 entdeckten das „High-Z Supernova Search Team“ und das Forschungsteam des „Supernova Cosmology Project“, dass sich Objekte mit zunehmend größerer Distanz von unserem Beobachterpunkt immer schneller entfernten. Sie beobachteten Supernovae²⁷ vom Typ IA. Diese werden als Standardkerzen des Universums bezeichnet, weil die Sterne, welche sie erzeugen, immer mit der gleichen Masse implodieren. Ihre Leuchtkraft ist deswegen bekannt. Somit lässt sich aus der gemessenen Helligkeit ihre exakte Entfernung ableiten. Der Vergleich dieser Distanzen mit der Rotverschiebung ergab, dass die Supernovae schwächer und damit weiter entfernt waren als erwartet. Dies bewies: *Die Ausdehnung des Universums hat sich über die Jahrmilliarden nicht verlangsamt, sondern beschleunigt* (vgl. [28]).

Ein weiteres Weltbild war mit dieser Erkenntnis hinfällig. Doch Astronomen der Zeit kannten bereits eine **Möglichkeit, die für die beschleunigte kosmische Expansion sorgte: Die kosmologische Konstante**. Wie bereits in 3.4 beschrieben, sorgt ein Modell mit kosmologischer Konstante und immer geringer werdender Kontraktionskraft²⁸ durch Materie für einen asymptotischen Grenzwert für den Hubble-Parameter:

$$H_{\infty} \rightarrow \sqrt{\frac{c^2 \Lambda}{3}} = c \cdot \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$$

Anhand der zweiten Friedmann-Gleichung, der „Beschleunigungsgleichung“²⁹, lässt sich dieser Umstand ebenfalls belegen:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = - \underbrace{\frac{4\pi G}{3}\rho}_{\text{Gravitation}} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Während die Gravitation durch das negative Vorzeichen abbremsend wirkt, sorgt Λ für eine fortwährende Beschleunigung³⁰ (vgl. [5]). Mit quasi konstanter Expansionsrate pro Raumeinheit kommt es zu einem exponentiellen Wachstum des Skalenfaktors: $a(t) = a_0 \cdot e^{H_{\infty} t}$. Die zeitliche Entwicklung des Modells sieht aus wie folgt:

²⁷Explosion von Sternen

²⁸anziehende Kraft

²⁹Diese wird in 7.5 hergeleitet.

³⁰Wie bereits mehrfach gezeigt, wird mit fortlaufender Expansion die Dichte extrem gering und der Gravitationsterm verschwindet nahezu.

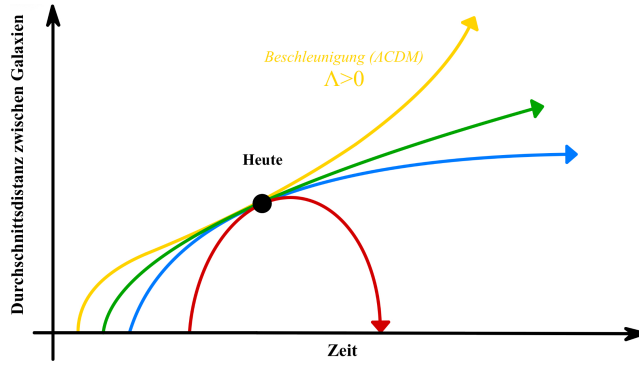


Abbildung 5: Entwicklung des Λ CDM-Modells

Die kosmologische Konstante war damit keine „Eselei“ mehr und fand nach Jahren der Verbannung in die Fußnoten der Wissenschaft wieder Einzug in das Standardmodell des Universums: Das heutige Λ CDM-Modell.

4.2 Zusammensetzung des Dichteparameters

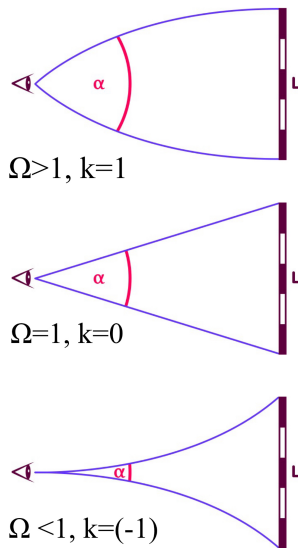


Abbildung 6:
Wahrgenommene Länge je
nach Krümmung des
Universums

Wie wir aber wissen, ist die kosmologische Konstante nicht allein relevant für die Modelle des Universums. Auch die Krümmung spielt weiterhin eine Rolle. Die experimentelle Bestimmung der globalen Krümmung erfolgte durch die Vermessung der kosmischen Hintergrundstrahlung. Da das Alter des Universums bekannt ist, lässt sich die physikalische Größe L der typischen Fluktuationen (Temperaturunterschiede) in der Hintergrundstrahlung theoretisch exakt berechnen. Diese Fluktuationen dienen somit als astronomisches „Standardlineal“. Wir kennen deshalb die tatsächliche Länge zwischen zwei Punkten im Spektrum der kosmischen Hintergrundstrahlung. Je nachdem, wie das Universum gekrümmt ist, sollten aber bei der Betrachtung der kosmischen Hintergrundstrahlung Veränderungen auftreten (vgl. [29]).

Wie in Abbildung 6 illustriert, hängt der beobachtete Winkel α , unter dem uns die Strukturen erscheinen, direkt von der Krümmung des Raumes ab³¹. In einem positiv gekrümmten Universum ($\Omega > 1$) sollte uns L daher größer und in einem negativ gekrümmten Raum ($\Omega < 1$) kleiner erscheinen.

Tatsächlich liegt die durch das Weltraumteleskop Planck vermessene Länge L genau bei der errechneten, sprich: Das Universum ist „flach“: $\Omega = 1 \pm 0,002$

³¹Bereits in 3.3 wurde festgestellt, dass sich die Innenwinkelsummen eines Dreiecks mit der Raumgeometrie unterscheiden.

(vgl. [17])

Errechnet man jedoch den Dichteparameter separat, so erkennt man, dass die tatsächliche Dichte der normalen baryonischen Materie³² nur auf einen Bruchteil der benötigten Dichte kommt:

$$\Omega_{bM} = \frac{\rho_{bM}}{\rho_{crit}} \approx 0,049$$

Beobachtungen der Umlaufbahnen von Galaxien zeigen, dass ihre Gravitation eigentlich viel zu schwach ist, um ihre Systeme im Orbit zu halten. Man errechnete deswegen ebenfalls einen Wert für diese gravitativ wirkende „Dunkle Materie“, die es zusätzlich in diesen Galaxien geben muss (vgl. [31], S. 14). Der geschätzte Dichteparameter liegt bei $\Omega_{dM} = 0,268$ (vgl. [32]). Abgesehen davon weiß man heutzutage nur, dass diese dunkle Materie nicht-relativistisch ist, was Unregelmäßigkeiten in der Isotropie des Universums erklären könnte³³.

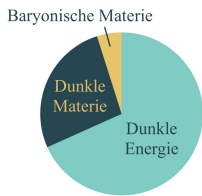


Abbildung 7:
Zusammensetzung
Gesamtdichte

Die dunkle Materie ist als weiterer wesentlicher Bestandteil des Universums der andere Namensgeber des heutigen kosmologischen Standardmodells (CDM steht für „Cold Dark Matter“), soll aber an dieser Stelle nicht weiter thematisiert werden (vgl. [34]).

Die fehlenden 68,3% werden einer „dunklen Energie“ zugeschrieben“. Sie wird angesehen *als die Verkörperung der kosmologischen Konstante* und wird deswegen auch mit dem Index Λ gekennzeichnet (II). Neben der baryonischen und dunklen Materie (I) gibt es zusätzlich noch die Strahlung, die als Energieform auch zur Dichte dazugezählt werden muss, heute allerdings zu vernachlässigen ist (III). Die Zusammensetzung des Dichteparameters sieht so wie folgt aus (vgl. [16], S. 60):

$$\begin{aligned} \Omega_{tot} &= \frac{\rho_{bM}}{\rho_{crit}} + \frac{\rho_{dM}}{\rho_{crit}} + \frac{\rho_{\Lambda}}{\rho_{crit}} + \frac{\rho_R}{\rho_{crit}} = \overbrace{\Omega_{bM} + \Omega_{dM}}^{\text{I}} + \overbrace{\Omega_{\Lambda}}^{\text{II}} + \overbrace{\Omega_R}^{\text{III}} = 1 \\ &= 0,049 + 0,268 + 0,683 + 0 = 1 \end{aligned}$$

4.3 Dunkle Energie

Wie sich diese Komponenten mit der Zeit verändert haben, ist in Abbildung 8 zu erkennen. Am Anfang dominierte die Strahlungsenergiedichte³⁴. Strahlung wird jedoch mit zunehmender Expansion durch Rotverschiebung schwächer. Die ersten fünf Milliarden Jahre expandiert das Universum also abgebremst (vgl. [3]). Wie in 4.1 gezeigt, gibt es aber einen Punkt (*hier in rot*), ab dem die Massendichte immer schneller abnimmt. Dadurch dominiert heute (*hier*

³²Für uns „normale“ Materie, die aus baryonischen Teilchen (Protonen und Neutronen) besteht (vgl. [30]).

³³Kosmische Urstrukturen sind unregelmäßiger als sie eigentlich sein dürften (vgl. [33]).

³⁴Die Strahlenenergie lässt sich aufgrund der [Energie-Masse-Äquivalenz](#) auch als Dichte interpretieren.

in Orange) bereits die konstante dunkle Energie, was sich in den nächsten Jahrmilliarden noch verstärken wird (vgl. [5]).

Für diese Entdeckung erhielten Saul Perlmutter einerseits, sowie Brian P. Schmidt und Adam G. Riess von den in 4.1 genannten Forschungsteams 2011 den Nobelpreis für Physik (vgl. [28]). Dabei ist sonst recht wenig über die dunkle Energie bekannt: Wir kennen lediglich ihren Beitrag zur Expansion, der an dieser Stelle noch einmal genauer erklärt wird: Tatsächlich hat jede Energieform einen Druck p , der auf die Beschleunigung der Expansion wirkt. Er ist gegeben durch $p = w \cdot c^2 \rho$. Jede Form von Energie³⁵ hat nun einen festgelegten w -Parameter. Für die dunkle Energie beträgt er $w_\Lambda = -1$ und somit $p_\Lambda = -c^2 \rho_\Lambda$, also **abstoßend**. Die Beschleunigungsgleichung aus 4.1 lässt sich nun in Abhängigkeit jedes Drucks schreiben:

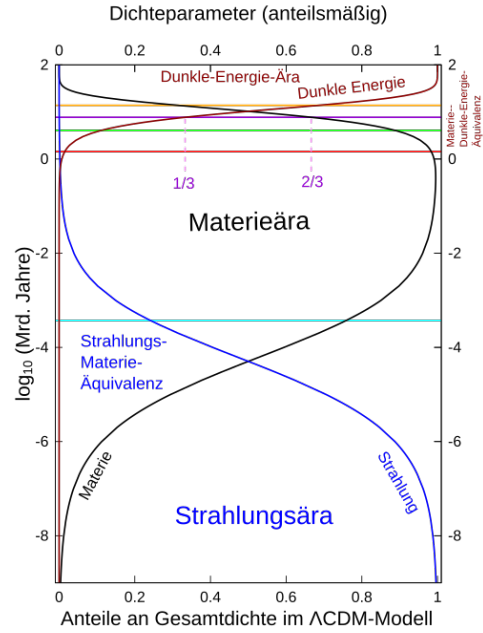


Abbildung 8: Entwicklung verschiedener Dichten

$$\frac{\ddot{a}}{a} = - \underbrace{\frac{4\pi G}{3} \left(\rho_M + \frac{3p_M}{c^2} \right)}_{\text{Materie-Term}} - \underbrace{\frac{4\pi G}{3} \left(\rho_\Lambda + \frac{3p_\Lambda}{c^2} \right)}_{\text{Dunkle-Energie-Term}}$$

Einsetzen von $p_\Lambda = -c^2 \rho$ und $p_M = (0)c^2 \rho$, da $w_m = 0$ und anschließend vereinfachen:

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho_M + \frac{3 \cdot (0)}{c^2} \right) - \frac{4\pi G}{3} \left(\rho_\Lambda + \frac{3 \cdot (-\rho_\Lambda c^2)}{c^2} \right) \\ &= -\frac{4\pi G}{3} \rho_M - \frac{4\pi G}{3} (\rho_\Lambda - 3\rho_\Lambda) = -\frac{4\pi G}{3} \rho_M + \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda = \frac{4\pi G}{3} \underbrace{(-\rho_M + 2\rho_\Lambda)}_{\text{Effektive Wirkung}} \end{aligned}$$

Damit die Expansion beschleunigt ($\ddot{a} > 0$) muss der Term, der die effektive Wirkung je nach Vorzeichen bestimmt, positiv werden. Das passiert, sobald $\rho_\Lambda > \frac{\rho_M}{2}$ und ist seit knapp 5-6 Milliarden Jahren der Fall (In Abb. 8 lila). Setzen wir unsere heutigen Dichten ein, so sehen wir, dass $2(0,7) - 0,3 = 1,1$. Die Klammer ist also positiv und die beschleunigte Expansion mathematisch bewiesen³⁶ (vgl. [5]).

³⁵Es gibt neben Materie ($w_M = 0$) noch Photonen ($w_P = \frac{1}{3}$) und in der Theorie die Quintessenz ($w_Q = -\frac{1}{3}$) oder ultrarelativistische Materie ($w_{urM} = 1$) (vgl. [35]).

³⁶Dass dunkle Energiedichte und die Materiedichte ausgerechnet zum jetzigen Zeitpunkt in der grob gleichen Größenordnung stehen, bezeichnen Astrophysiker als „Koinzidenz-“ oder „Warum-jetzt-Problem“. Mehr dazu in 5.2.1.

Wenn man die beiden Terme der dunklen Energie in den zwei Schreibweisen³⁷ anschaut, so ergibt sich das genaue Verhältnis zwischen kosmologischer Konstante und beobachteter Dichte der dunklen Energie:

$$\rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \approx 5,96 \times 10^{-27} \frac{kg}{m^3} \Rightarrow \Lambda = \frac{8\pi G}{c^2} \rho_{\Lambda} \approx 1,1 \times 10^{-52} \frac{1}{m^2}$$

In der ersten Friedmann-Gleichung für das Λ CDM-Modell gilt deshalb rückblickend mit dieser Definition (vgl. [5]):

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \cdot \rho_M - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{8\pi G}{3} \rho_{\Lambda}$$

5 Das Kosmologische Konstantenproblem und offene Fragen

Doch, wie kann es sein, dass sich diese dunkle Energie eben nicht ausdünnt, wie es „normale“ Energie und selbst die dunkle Materie tun? Außerdem kennen wir nun zwar die Dichte der dunklen Energie, haben aber keine Ahnung, was sie bedeuten könnte. Das Gute an einem noch so unerforschten Phänomen: Es lässt viel Platz für Theorien und Interpretationen.

5.1 Vakuumenergie

Die inzwischen geläufigste Interpretation ist die Vakuumenergiedichte. Das Konzept, dass selbst das „Nichts“ eine Energie hat, stammt bereits aus den 1920er Jahren, wurde aber als Form der kosmologischen Konstante neu aufgegriffen (vgl. [36]). Die Antwort [wie schwer](#) nun das pure Vakuum ist könnte sich unter anderem in der Quantenfeldtheorie wiederfinden (vgl. [37]).

Astrophysiker schauten deswegen buchstäblich vom allergrößten makroskopischen Weltall in die allerkleinste mikroskopische Quantenwelt. Die Energiedichte kann hier nicht nur berechnet werden, sondern sogar mit der Vakuumfluktuation erprobt³⁸ (vgl. [38]). Man errechnete und bestimmte den Wert für $\rho_{vac, QFT} \approx 10^{111} \frac{J}{m^3}$ bis $10^{113} \frac{J}{m^3}$. Verglichen mit dem beobachteten Wert ergibt sich:

$$\frac{\rho_{vac, QFT}}{\rho_{vac, beobachtet}} = \frac{10^{111} \frac{J}{m^3}}{10^{-9} \frac{J}{m^3}} = 10^{120}$$

Die beiden Werte unterscheiden sich also um 120 Größenordnungen und liegen somit außerhalb jeglicher wissenschaftlichen Toleranz³⁹. Diese Diskrepanz wird heute als das „*Problem der kosmologischen Konstante*“ (vgl. [5]) oder auf englisch dramatischer als „*the Vacuum Catastrophe*“ bezeichnet (vgl. [40]).

³⁷Die erste unter 4.1, die zweite oben auf dieser Seite.

³⁸*Hinweis: stark vereinfacht.* Mit dem Casimir-Effekt können durch Vakuumfluktuation entstehende virtuelle Teilchen gemessen werden. Mehr in dieser Quelle: [38].

³⁹Der Unterschied ist so groß, als würde man die Entfernung zum Rand des beobachtbaren Universums um eine Protonengröße genau abschätzen und sich dabei um den Faktor der gesamten Universumsgröße verschätzen (vgl. [39]).

Doch welcher der beiden Werte ist nun falsch? Wenn mich diese Facharbeit etwas gelehrt hat: Meist sind es die Theorien! Unsere besten Forscher:innen arbeiten daran, wie es mit diesem Problem weitergehen soll (vgl. [39]).

Neuere und angepasste Rechnungen kommen zwar näher an die Realität, sind aber immer noch um viele Größenordnungen verschieden. Die Vakuumenergie gilt deswegen nicht verifiziert als dunkle Energie (vgl. [40]).

5.2 Mögliche Lösungsansätze

Λ ist zwar eine sichere Lösung für die Geometrie, aber ein Problem für die Teilchenphysik. Aber; Wo viele Probleme sind, da sind ebenso viele Lösungen. Vorher ist es wichtig zu sagen, dass es auch keine Korrelation zwischen Λ , dunkler Energie und beschleunigter Expansion geben könnte. Es könnte ganz andere Treiber dieser Expansion geben, von neuen Teilchen ohne Masse, bis hin zu multiplen Faktoren gleichzeitig (vgl. [41], S. 39):

5.2.1 Quintessenz

Harald Lesch antwortete auf die Frage einer zeitabhängigen kosmologischen Konstante so: „[...]Wenn [die kosmologische Konstante] wirklich eine Konstante wäre, dann wäre das eine Katastrophe. Eine Katastrophe, weil es sich nicht mehr um einen Gegenstand handelt, den man erforschen kann, nämlich wo man fragen kann ‚Wo kommt das her?‘ Die kosmologische Konstante wäre gewissermaßen ein Muttermal des Universums, irgendeine Kontingente, also könnte-auch-ganz-anders-sein-Geschichte.“ [42].

Die Idee einer kosmologischen Konstante, die sich mit der Zeit oder anderen Faktoren ändert, wird von Kosmologen auch „Quintessenz“⁴⁰ genannt. Auf Basis eines inhomogenen Skalarfelds⁴¹ wäre es eine fünfte antigravitative Wechselwirkung neben den vier Bestehenden⁴² (vgl. [41]). Dies würde das kosmologische Konstanten-, sowie das Koinzidenzproblem aus 4.3 lösen (vgl. [44]).

5.2.2 Modifizierte Gravitation

Ein radikalerer Lösungsansatz besteht darin, nicht den Inhalt des Universums (die dunkle Energie) in Frage zu stellen, sondern das Gesetz, dem er folgt: die Allgemeine Relativitätstheorie. Theorien zur modifizierten Gravitation, wie etwa die $f(R)$ -Gravitation, schlagen vor, dass Einsteins Feldgleichungen lediglich eine Annäherung für schwache Gravitationsfelder sind (vgl. [45]). Auf kosmischen Skalen könnte die Schwerkraft demnach einem anderen Gesetz folgen, das eine beschleunigte Expansion vortäuscht, ohne dass eine mysteriöse Substanz vonnöten wäre (vgl. [10], Prompt G).

⁴⁰latein: *quinta essentia*, „Fünftes Element“

⁴¹Ein physikalisches Feld, dessen Wert (Skalar) im Gegensatz zu einer Konstante sowohl zeitlich veränderlich und damit dynamisch ist, als auch räumlich unterschiede aufweist (vgl. [10], Prompt F).

⁴²„Gravitation, Elektromagnetismus, starke[] und schwache[] [Kernkraft]“ [43]

5.2.3 Multiversum

Wenn weder die Quantenphysik noch eine Änderung der Gravitationsgesetze eine Antwort liefern, bleibt ein fast schon philosophischer Ausweg: das Multiversum. Nach dem „anthropischen Prinzip“⁴³ könnte unser Universum nur eines von unzähligen sein, in denen die kosmologische Konstante jeweils unterschiedliche Werte annimmt. In den meisten dieser Welten wäre Λ so groß, dass das Universum bereits vor der Bildung von Sternen zerrissen worden wäre. Wir fänden uns demnach in einem der wenigen „lebensfreundlichen“ Universen wieder, in denen der Wert zufällig klein genug ist. Auch wenn dies das Problem der 120 Größenordnungen mathematisch nicht löst, erklärt es zumindest unsere Beobachtung: eine Antwort, die viele Physiker unbefriedigt lässt, aber die Grenzen unserer Erkenntnis aufzeigt (vgl. [47])⁴⁴.

⁴³besagt, „dass das beobachtbare Universum nur deshalb beobachtbar ist, weil es alle Eigenschaften hat, die dem Beobachter ein Leben ermöglichen“ [46].

⁴⁴Selbstverständlich gibt es hier auch zahlreiche weitere Interpretation der kosmologischen Konstante, wie beispielsweise als eine thermodynamische Variable (vgl. [48]). Sie seien an dieser Stelle aber nicht näher erwähnt.

6 Fazit und Ausblick

War die kosmologische Konstante nun „Einsteins Größte Eselei“? War sie überhaupt eine Eselei? Kurz gesagt: Wir wissen es nicht. Sie hat zwar heute über die „Dunkle Energie“ eine neue Bedeutung gefunden, über die wir aber mindestens genauso wenig wissen. Es wäre daher vorschnell, hier ad-hoc ein Urteil zu treffen: Wie wir gesehen haben, hat das in der Vergangenheit schon zu Problemen geführt.

Die kosmologische Konstante hat also eine lange Geschichte zu verzeichnen, der ein 12. Klässler erst einmal eine hohe Komplexität attestieren kann: Von einem Ausgleichsterm gegen die fundamentalste Wechselwirkung in die Fußnoten der Astronomiemagazine und von dort zurück in das kosmologische Standardmodell. Die Analyse der Friedmann-Gleichungen (die wohl auch der Name dieser Arbeit hätte sein können) belegt, dass sie auch für die Geometrie unseres Raumes mitverantwortlich ist und das Schicksal des Universums mitbestimmt. Sie macht knapp 70 % eben dieses Universums aus, steckt vielleicht in jedem Kubikmeter unseres Lebens und sorgt zum Zeitpunkt $t = 13.800.000.000$ Jahre für eine beschleunigte Expansion. Eine Fähigkeit, für die sie ursprünglich gar nicht geschaffen war.

Zu sagen, dies sei ein Beleg für Einsteins Genie - falls es den überhaupt bräuchte - halte ich dennoch für falsch. Niemals hätte Einstein wissen können, was sie irgendwann einmal bewirken würde. Die perfekte Theorie über alle nur erdenkbaren Zusammenhänge war unvollständig und enthielt Lücken (vgl. [49], S. 72). Das verbleibende Rätsel um die enorme Diskrepanz von 120 Größenordnungen zwischen Theorie und Beobachtung verdeutlicht zudem, dass wir erst am Anfang eines vollständigen Verständnisses stehen.

Zwar sorgt die kosmologische Konstante daher an den Kantinentischen der Astrophysikerkonferenzen ohne Zweifel für Kopfzerbrechen, aber das ist irgendwo auch etwas Schönes. Möglichkeiten einer Quintessenz stellen Hoffnung und Erwartung an die Wissenschaft hoch, noch mehr über das uns so unbekannte Universum zu erfahren. Mit Missionen wie Euclid oder dem Nancy Grace Roman Space Telescope könnten schon bald Antworten auf diese Fragen gefunden werden⁴⁵. Forschung ist schließlich etwas Wunderschönes und an Projekten zur Ergründung einer der vielleicht größten Fragen der Physik mangelt es zum Glück nicht.

Dies lehrt uns: Mit dem Fortgang der Forschung müssen wir **zu Veränderung bereit sein** - gegebenenfalls unser gesamtes Weltbild einmal um 180° zu drehen oder gar zu krümmen. Der Urvater dieses Themas sagte schließlich:

„Probleme kann man niemals mit derselben Denkweise lösen, durch die sie entstanden sind“.

-Albert Einstein [52]

⁴⁵Im Rahmen dieser Facharbeit war es nicht mehr möglich auf Missionen zur Ergründung dunkler Energie einzugehen. Äußerst lesenswert sind unter anderem die Facharbeit von Gero Wasmuth [37] und folgenden Quellen: [50][51].

7 Anhang

7.1 Konstanten- und Formelregister

π Kreiszahl (Pi): $\pi \approx 3,14159$

e eulersche Zahl, Basis des natürlichen Logarithmus: $e \approx 2,71828$

G Newton'sche Gravitationskonstante: $G \approx 6,74 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$

c Lichtgeschwindigkeit: $c \approx 299.792.458 \frac{m}{s}$

κ Einstein'sche Gravitationskonstante: $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$

H Hubble-Parameter: $H_0 \simeq 67 - 76 \frac{km}{s \cdot Mpc}$, dabei ist $1Mpc \approx 3,086 \times 10^{22}m$
Bewusst wird hier vom Namen „Hubble-Konstante“ Abstand genommen, da es sich um einen zeitlich veränderlichen Wert handelt und verschiedene Messverfahren mit zunehmender Genauigkeit auf in der Essenz verschiedene Größen kommen. Siehe: [53].

ρ_{crit} Kritische Dichte: $\rho_{crit} = 9,20 \times 10^{-30} \frac{g}{cm^3}$

$E = mc^2$ Energie-Masse Äquivalenz: $E = mc^2$, bzw. $m = \frac{E}{c^2}$. Für diese Arbeit bedeutet das, dass egal ob Energie als Strahlung oder Materie vorliegt, ihr eine Dichte zugewiesen werden kann.

7.2 Schreibweisen

- Ein $\Rightarrow$ steht entweder für das Einsetzen von Werten oder Definitionen oder eine Schlussfolgerung.
- Im Regelfall wird ein Malpunkt $\cdot$ für Multiplikationen verwendet. Nur bei Zehnerpotenzen und einem Sonderfall in 3.4 werden Malkreuze $\times$ benutzt.
- Alle Variablen mit Index $[...]_0$ sind Daten zum heutigen Zeitpunkt. Dies ist nicht zu verwechseln mit dem Zeitpunkt des Urknalls $t = 0$.
- Astrophysikalische Eigennamen wie „kosmologische Konstante“ oder „dunkle Energie“ werden in der Regel klein geschrieben, es sei denn, sie stehen in einer Überschrift oder werden tatsächlich als Name genannt.
- Namen von Physikern als adjektive werden klein geschrieben, es sei denn sie sind Teil eines Eigennamen wie „Newton'sches Gravitationsgesetz“.
- Fußnoten werden dann groß angefangen, wenn sie mit Substantiv beginnen oder ein Erklärungssatz sind und nicht wenn es sich nur um einzelne Klarstellungen handelt.

7.3 Klarstellung der Expansionsgeschwindigkeiten

Verteilt über die Facharbeit gab es verschiedene Methoden zur Berechnung des Expansionsverhaltens. Die Expansionsgeschwindigkeit ist zu jedem Zeitpunkt gegeben durch $H(t)$. Diese ist nicht zu verwechseln mit der Änderung der Hubble-Rate, also ob die Expansion beschleunigt oder abbremst.

In der Facharbeit wird in 3.4 der Grenzwert des Hubble-Parameters je nach Bedingungen ermittelt, also nicht die Funktion der Beschleunigung oder der Gesamtgröße. H gibt nur an, ob das Universum im Endzustand (entweder Erreichen der maximalen Ausdehnung und unbegrenzter Ausdehnung) expandiert oder nicht.

Die tatsächliche Größe des Universums ist in den verschiedenen Phasen des Λ CDM-Modells durch unterschiedliche Zusammenhänge gegeben:

1. Strahlungsdominiertes Universum:

Für das Strahlungsdominierte Universum galt der Zusammenhang:

$$a(t) \propto t^{\frac{1}{2}}$$

2. Materiedominiertes Universum:

Für das Materiedominierte Universum galt der Zusammenhang:

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$$

Diese Form von gebremstem Wachstum ist ähnlich zum 2. Friedmann-Modell.

3. Universum dominiert von dunkler Energie:

$$a(t) = a_0 \cdot e^{H_\infty t}$$

H_∞ ist dabei der asymptotische Wert des Hubble-Parameters, wenn die Dichte für die Expansionsrate bedeutungslos wird. In allen Modellen mit positiver kosmologischer Konstante (unter anderem in 3.4 und 4.1) wurde theoretisch ihr Wert anhand der ersten Friedmann-Gleichung bereits als $H_\infty \rightarrow c \cdot \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$ berechnet. Praktisch baut dies aber darauf auf, dass wir die kosmologische Konstante genau bestimmen können, was mit den heutigen Messmethoden schwierig ist. Deswegen legten Forscher den asymptotischen Hubble-Wert mithilfe von zwei bekannten Werten als $H_\infty = \Omega_\Lambda \cdot H_0$ fest (vgl. [10], Prompt H).

Wenn man diese einzelnen Schritte zusammenführt, ergibt sich für eine Gesamtfunktion (vgl. [54]):

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left[\sinh \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} H_0 t \right) \right]^{\frac{2}{3}}$$

$\sinh$ ist eine Hyperbelfunktion kombiniert aus zwei natürlichen e -Funktionen.

Die obige Funktion stellt somit die Gesamtgröße des Universums zu verschiedenen Zeitpunkten $a(t)$ dar. Ihr Graph ist der in Abb. 5. Ihre Ableitung wäre der wiederum Hubble-Parameter $H(t)$.

7.4 Vollständige Herleitung der 1. Friedmann-Gleichung

Im Anhang finden sich unter anderem diverse Trivialien für interessierte Leser:innen. Sie zählen nicht zu den eigentlichen 15 Seiten der Facharbeit. Die folgende Herleitung ist zu Teilen eine Eigenleistung:

Zwar ist die Herleitung der Friedmannschen Interpretation der relativistischen Feldgleichungen nicht zwingend notwendig, für das vollständige Verständnis des Themas jedoch nicht trivial. Eine entsprechende Herleitung folgt aus Platzgründen hier im Anhang (vgl. [55], einziger Prompt).

Die folgende Herleitung erfolgt nicht nach dem Modell der Allgemeinen Relativitätstheorie, sondern streng nach den Prinzipien der klassischen Mechanik nach Isaac Newton („newtonisch“), um eine veranschaulichende Darstellung zu gewährleisten.

7.4.1 Ein Kugelmodell

Wir stellen sich uns das Universum wie eine dreidimensionale Kugel vor⁴⁶. Dies entspricht zwar nicht der Realität, ist aber zur Veranschaulichung durchaus geeignet. So sei das Verhältnis jeder Länge in dieser Kugel gegeben durch den Skalenfaktor in Abhängigkeit von der Zeit $a(t)$. Der „Zoom“ jeder Länge durch den Skalenfaktor ist deswegen bei $t = 0$ eins.

Wir betrachten nun eine sehr kleine Testmasse m auf der Oberfläche dieser Kugel. Der physikalische Radius, also die veränderliche Länge, ist somit gegeben durch den Skalenfaktor multipliziert mit dem Anfangsradius unserer Kugel r_0 :

$$r(t) = a(t) \cdot r_0$$

Die Expansion, also die Geschwindigkeit unserer mitbewegten Koordinate r_0 , ist somit gegeben durch eine Veränderung des Radius nach der Zeit, also:

$$\dot{r} = \dot{a} \cdot r_0$$

Die Beschleunigung der Veränderung dieser Koordinate ist daher:

$$\ddot{r} = \ddot{a} \cdot r_0$$

Die Masse unserer Kugel sei nunmehr gegeben als die Dichte der Kugel ρ multipliziert mit dem Volumen der Kugel V . Das Volumen einer Kugel ergibt sich mit $V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$. Für die Masse unseres „Kugeluniversums“ ergibt sich somit:

$$M_{Kugel} = \rho_{Kugel} \cdot V_{Kugel} = \rho(t) \cdot \frac{4}{3}\pi(a(t) \cdot r_0)^3$$

⁴⁶In 3.3 ging es um die Oberfläche, dort war das Universum also zweidimensional. Hier geht es um den Einbettungsraum. Das Universum ist also in diesem Beispiel nicht die Oberfläche der Kugel.

7.4.2 Energieerhaltung im Kugeluniversum

Als nächstes wollen wir den Skalenfaktor ändern; die Kugel also expandieren lassen. Dadurch hat unsere Testmasse eine Geschwindigkeit und entsprechend auch eine (Bewegungs-)Energie. In der klassischen Mechanik gilt, dass die Gesamtenergie eines Systems konstant ist und sich wie folgt zusammensetzt:

$$E_{\text{Gesamt}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$$

Die Formeln für die kinetische ($E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$) und die potenzielle Energie der Gravitation ($E_{\text{pot}} = -\frac{GMm}{r}$) sind uns dabei bekannt. Die potenzielle Energie durch die Gravitation kann sich dabei als eine entgegenwirkende Kraft vorgestellt werden. Die Gesamtenergie des Systems ist nun gegeben als:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{GMm}{r}$$

Man ersetze nun r , $\dot{r}$ und M durch unsere Ausdrücke mit dem Skalenfaktor $a(t)$:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m(\dot{a}r_0)^2 - \frac{G \cdot (\rho \frac{4}{3}\pi a^3 r_0^3) \cdot m}{ar_0} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{a}^2 r_0^2 - \frac{4\pi}{3}G\rho m a^2 r_0^2 \end{aligned}$$

Nun kannte Isaac Newton die kosmologische Konstante Λ selbstverständlich noch nicht, aber wir können sie als eine „Repulsivkraft“⁴⁷ hinzufügen; Eine weitere Form potenzieller Energie (vgl. [15]).

7.4.3 Herleitung des Lambda-Terms

Dieser Teil kann der Anschaulichkeit halber übersprungen werden. Er erklärt lediglich, wieso der Λ -Term in dieser Form später in die Energiegleichung eingesetzt wird und nicht einfach als eine Integrationskonstante buchstäblich aus dem Nichts kommt.

Um die kosmologische Konstante einzuführen, nutzen wir die Poisson-Gleichung. Sie kann zur Lösung einer elliptischen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung genutzt werden⁴⁸.

Der Laplace-Operator Δ beschreibt in der Physik die „Krümmung“ oder Quellendichte eines Feldes. In der klassischen Gravitation besagt die Poisson-Gleichung, dass die Masse ρ ⁴⁹ die Quelle des Gravitationspotenzials Φ ist⁵⁰:

⁴⁷abstoßende Kraft

⁴⁸Die mathematischen Grundlagen sind hier nicht zwingend nötig. Die „Lösung“ einer Differentialgleichung wäre für den Rahmen einer Facharbeit eh zu umfangreich. Im weiteren wird sehr vereinfacht gerechnet.

⁴⁹*Hinweis:* Die Masse wird hier mit ρ statt mit m betitelt. Sie hat nichts mit der Dichte zu tun.

⁵⁰Manche mögen sich aus dem Physikunterricht noch an Φ erinnern. Auch dort findet es Anwendung als Beschreibung der Quellendichte eines Feldes, wie beispielsweise beim Magnetischen Fluss.

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho.$$

Einstein fügte Λ hinzu, was im newton'schen Modell wie eine negative, repulsive Hintergrunddichte wirkt:

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho - \Lambda c^2$$

Wir betrachten nun nur die Wirkung auf das Gravitationspotenzial durch die kosmologische Konstante. Der Teil, der durch die Gravitation entsteht, ist ja bereits in den anderen Termen unseres Energiegleichgewichts von oben enthalten:

$$\Delta\Phi_\Lambda = -\Lambda c^2$$

In einem kugelsymmetrischen System wie unserem lautet der Operator Δ in Abhängigkeit vom Radius r :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi_\Lambda}{dr} \right) = -\Lambda c^2$$

Wir integrieren nun Schrittweise um daraus eine Kraft zu erhalten.

1. Wir multiplizieren beide Seiten mit r^2 :

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi_\Lambda}{dr} \right) = -\Lambda c^2 r^2$$

2. Integration (Bildung der Stammfunktion nach r):

$$r^2 \frac{d\Phi_\Lambda}{dr} = -\frac{1}{3} \Lambda c^2 r^3$$

3. Division durch r^2 :

$$\frac{d\Phi_\Lambda}{dr} = -\frac{1}{3} \Lambda c^2 r$$

4. Für die Kraft gilt $F = -m \cdot \frac{d\Phi}{dr}$. Wir erhalten somit eine abstoßende Kraft $F_{\Lambda, \text{repulsiv}} = \frac{1}{3} m \Lambda c^2 r$ (vgl. [56]).

Die Kraft ist, wie wir wissen, eine momentane Wirkung. Die Integration über den Weg (in unserem Falle über den Radius r) summiert die Wirkung dieser Kraft auf und erfasst so die gesamte energetische Änderung eines Systems. In unserem Falle ist die verrichtete Arbeit (W) gleichbedeutend mit einer weiteren potenziellen Energie. Es gilt der Zusammenhang $\Delta E_{\text{pot}} = -\int (F) dr$ (vgl. [57]).

$$W = E_{\text{pot},\Lambda} = - \int F_\Lambda dr = - \int \left(\frac{1}{3} m \Lambda c^2 r \right) dr$$

$$E_{\text{pot},\Lambda} = -\frac{1}{3} m \Lambda c^2 \int (r) dr = -\frac{1}{3} m \Lambda c^2 \cdot \left(\frac{1}{2} r^2 \right)$$

Für die potenzielle Energie, die von der kosmologische Konstante ausgeht, ergibt sich deswegen: $E_{\text{pot},\Lambda} = -\frac{1}{6} m \Lambda c^2 r^2$

7.4.4 Λ -Term in Energiegleichung

Wir fügen diesen Term nun in die Energiegleichung hinzu und ersetzen $r = a \cdot r_0$:

$$E_{\text{gesamt}} = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{a}^2r_0^2}_{\text{kinetisch}} - \underbrace{\frac{4\pi}{3}G\rho m a^2r_0^2}_{\text{Gravitationsenergie}} - \underbrace{\frac{1}{6}m\Lambda c^2 a^2r_0^2}_{\text{Dunkle Energie}}$$

An dieser Stelle nimmt die Friedmann'sche Gleichung eine Form an, in der man bereits jetzt eine Art „Dunkle Energie“ erkennen kann. Sie wird zwar als potenzielle Energie berechnet, aber kann (je nach Vorzeichen) eine genau umgekehrte Wirkung zur Gravitation haben. Dies gibt auch einen physikalischen Hintergrund, wie es zu den Annahmen in der Facharbeit kommen konnte.

Um nun aber die erste Friedmann-Gleichung in seiner „Reinform“ zu erhalten, muss dieses Energiegleichgewicht so umgestellt werden, dass $(\frac{\dot{a}}{a})^2$ isoliert steht. Wir dividieren zuerst durch $\frac{1}{2}mr_0^2a^2$:

$$\frac{E}{\frac{1}{2}mr_0^2a^2} = \frac{\frac{1}{2}m\dot{a}^2r_0^2}{\frac{1}{2}mr_0^2a^2} - \frac{\frac{4\pi}{3}G\rho m a^2r_0^2}{\frac{1}{2}mr_0^2a^2} - \frac{\frac{1}{6}m\Lambda c^2 a^2r_0^2}{\frac{1}{2}mr_0^2a^2}$$

Vereinfacht steht hier:

$$\frac{2E}{mr_0^2a^2} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Nun wird in der Kosmologie die Krümmung des Universums k über die Energie definiert. Wir ersetzen daher den linken Term mit $-\frac{kc^2}{a^2}$. Insgesamt erhalten wir so die erste Friedmann-Gleichung in der Form, wie sie auf unser „Kugeluniversum“ wirkt:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} = H^2$$

(vgl. [15]).

Wie in der eigentlichen Facharbeit erklärt, handelt es sich bei H_0 um den Hubble-Parameter, die Rate der Expansion des Universums, welche einen tiefen Einblick in die Expansionsgeschichte des Universums gewährleistet.

Es ist wichtig anzumerken, dass diese „newton'sche Herleitung“ der Friedmannschen Gleichung relativistisch formal absolut nicht korrekt ist. Sie bietet aber eine gute Analogie, um das Verhalten des Universums ein bisschen näher zu verstehen, indem man es buchstäblich auf eine kleine Kugel herunterschrumpft.

7.5 Kurze Herleitung der 2. Friedmann-Gleichung

Während die erste Friedmann-Gleichung aussagt, wie schnell das Universum expandiert, sagt die zweite, ob und wie diese Expansion beschleunigt. Die kurze Herleitung an dieser Stelle ist durchaus förderlich für das vollständige Verständnis des Themas und deutlich intuitiver als die Herleitung der ersten.

Für die Ermittlung einer Beschleunigung machen wir uns das zweite Newton'sche Axiom zunutze. Eine Kraft sorgt für die Beschleunigung unserer Testmasse⁵¹: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Also gilt $\ddot{r} = \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$. Die Kraft entsteht durch Gravitation (nach innen) und Λ (nach außen)⁵². Teilt man diese Kräfte durch die Testmasse erhält man:

$$\begin{aligned}\vec{a} = \ddot{r} &= \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-GmM}{r^2} + \frac{\frac{1}{3}m\Lambda c^2 r}{m} \\ \ddot{r} &= \frac{-GM}{r^2} + \frac{1}{3}\Lambda c^2 r\end{aligned}$$

Setzen wir nun wieder $r = a \cdot r_0$ und $M = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$ ein:

$$\ddot{a}r_0 = \frac{-G(\frac{4}{3}\pi\rho a^3 r_0^3)}{a^2 r_0^2} + \frac{1}{3}\Lambda c^2 a r_0$$

Teilen durch r_0 und a :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

(vgl. [15]).

Wie in der [Herleitung der ersten Friedmann'schen Gleichung](#) gilt, dass die der zweiten ebenfalls relativistisch nicht korrekt ist. Sie liefert aber de facto das gleiche Ergebnis (vgl. [10]).

⁵¹ $\vec{a}$, die Beschleunigung, ist hier mit Vektor gekennzeichnet, um Verwechslungen mit dem Skalenfaktor a auszuschließen.

⁵²Der Term für die Kraft von Lambda wurde bereits in [7.4.4](#) hergeleitet.

7.6 Die Speziallösung des Kosmos: Das de-Sitter-Modell

1917, nur kurz nach der Einführung der kosmologischen Konstante, brachte der niederländische Astronom, Physiker und Kosmologe Willem de-Sitter ein weiteres Modell des Kosmos auf.

Dieses ist für kosmologische Beobachtungen zwar nicht von Bedeutung, soll aber an dieser Stelle im Anhang wegen seiner historischen Relevanz und einzigartigen Bedingungen trotzdem Erwähnung finden (vgl. [22]). Das de-Sitter-Modell geht nämlich davon aus, *dass das Universum keine Masse besitzt*.

Entsprechend ist sowohl die Massendichte $\rho = 0$ und, da ohne Masse keine Krümmung entsteht⁵³, ebenfalls $k = 0$. Lediglich die kosmologische Konstante ist somit ein Faktor für die Expansion des Universums. Die Speziallösung der Friedmann-Gleichung sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned} H^2 &= \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \cdot \frac{\rho}{a^3} - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \\ &\Rightarrow \frac{8\pi G}{3} \cdot \frac{0}{a^3} - \frac{0 \cdot c^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} = \frac{\Lambda c^2}{3} \end{aligned}$$

Revolutionär war die Vorstellung der (positiven) kosmologischen Konstante als „Expansionstreiber“⁵⁴. Zu dem Zeitpunkt wurde das Universum schließlich noch als statisch angesehen.

Wegen der absurden Vorstellung, dass das Universum keine Materie und somit keine Dichte habe, ist ein de-Sitter-Kosmos für die Darstellung des Universums heutzutage ausgeschlossen. Einstein selbst bezeichnete die Idee selbst anfangs als „unsinnig“ (vgl. [58]).

Jedoch gibt es einen Grenzfall, bei dem eine ähnliche Situation vorliegt. So geht man **im Urknall von einer unendlich großen oder kleinen Dichte aus**. Die Expansion direkt nach dem Urknall wird deswegen häufig mit einem de-Sitter-Raum verglichen. Tatsächlich war die Idee eines de-Sitter-Kosmos eine der Grundlagen der ersten Urknalltheorie des Astronomen Georges Lemaître (vgl. [59])⁵⁵.

⁵³Dies gilt - wie bereits mehrfach erklärt -, da $k \propto \frac{\rho}{\rho_{crit}}$ ist.

⁵⁴Die Expansion wäre in diesem Falle exponentiell: $a(t) = a_0 \cdot e^{H \cdot t}$, wobei $H = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}}$.

⁵⁵*Hinweis:* Es handelt sich hierbei erneut lediglich um Theorien.

7.7 Literaturverzeichnis

7.7.1 Analoge Quellen

- [6] Roman U. Sexl und Helmuth Urbantke. Gravitation und Kosmologie. Spektrum Akademischer Verlag (Springer), 2002.
- [11] Dieter B. Herrmann. Geschichte der modernen Astronomie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1984.
- [16] Helmut Hetznecker. Expansionsgeschichte des Universums. Spektrum Akademischer Verlag (Springer), 2007.
- [18] Helmut Hilscher. Elementare Teilchenphysik. vieweg, 1996.
- [20] Max Born. Die Relativitätstheorie Einsteins. Springer-Verlag, 1969.
- [25] Laurence F. Abbot und So-Young Pi. Inflationary Cosmology. Sprache: Englisch, Zur Verfügung gestellt durch Bibliothek der Hochschule und Universität Osnabrück. World Scientific, 1986.
- [31] Jürgen Brück. „Die kosmologische Konstante“. In: *Astronomie heute* (Juni 2006).
- [41] Wolfgang Koser und Luz Ángela García. „Gibt es andere Arten dunkler Energie?“ In: *Das Weltraum-Magazin Space* (Mai 2021).
- [48] Jakob Salzer. „The Cosmological Constant as a Thermodynamic Variable in 2d Dilaton Gravity“. Sprache: Englisch, Zur Verfügung gestellt durch Bibliothek der Hochschule und Universität Osnabrück. Magisterarb. Technische Universität Wien, 2013.
- [49] Stephen W. Hawking. Eine kurze Geschichte der Zeit. Übers. von Hainer Kober. EBG Verlag, 1988.

7.7.2 Digitale Quellen

- [1] LEIFI Physik. [Gravitationsgesetz von Newton](#). (Besucht am 16.02.2026).
- [2] R. A. Puntigam. [Allgemeine Relativitätstheorie](#). Lexikon der Physik (Spektrum). 1998. (Besucht am 16.02.2026).
- [3] Franziska Konitzer und Christof Wetterich. [Kosmologische Konstante](#). [\[Audio-Podcast\]](#). Welt der Physik, März 2018. (Besucht am 10.02.2026).
- [4] Wikipedia. [Ad hoc](#). (Besucht am 28.02.2026).
- [5] Wikipedia. [Kosmologische Konstante](#). (Besucht am 07.02.2026).
- [7] Wikipedia. [Energie-Impuls-Tensor](#). (Besucht am 28.02.2026).
- [8] Andreas Müller. [Kosmologische Konstante](#). Lexikon der Physik (Spektrum). 2014. (Besucht am 16.02.2026).
- [9] Wikipedia. [Einsteinsche Feldgleichungen](#). (Besucht am 10.02.2026).
- [12] Wikipedia. [Hubble-Konstante](#). (Besucht am 08.02.2026).
- [13] Klaas S. de Boer. [Wie konnte Hubble zeigen, dass das Universum expandiert?](#) Argelander Institut für Astronomie, Universität Bonn. 2019. (Besucht am 26.02.2026).
- [14] Wikipedia. [Friedmann-Gleichungen](#). (Besucht am 10.02.2026).

- [15] How to Physics. [ART Lektion 7.2 - Friedmann Gleichung \(fast\) ohne allgemeine Relativitätstheorie und Weltmodelle](#). YouTube. 2020. (Besucht am 10.02.2026).
- [17] Wikipedia. [Dichteparameter](#). (Besucht am 10.02.2026).
- [19] [Kritische Dichte](#). Springer Lehrbuch Physik. (Besucht am 26.02.2026).
- [21] [Big Bounce - Die Trampolin Show](#). RTL+. Diese Quelle wurde nicht für die Erarbeitung des Themas genutzt. Es hat sich für alle Schüler:innen, die zu kosmologischen Modellen schreiben, etabliert, diese Show als Referenz zu nutzen. 2018. (Besucht am 10.02.2026).
- [22] Wikipedia. [Friedmann-Modell](#). (Besucht am 10.02.2026).
- [23] Jean-Pierre Luminet. [The Rise of Big Bang Models \(4\): Lemaître](#). 2015. (Besucht am 28.02.2026).
- [24] Carl Schröder. [Klassische Friedmann-Modelle des Universums](#). Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg. 2007. (Besucht am 28.02.2026).
- [26] Thomas Bührke. [Streit um Einsteins Konstante](#). 1996. (Besucht am 26.02.2026).
- [27] Urknall, Weltall und das Leben. [Expansion des Universums und Dunkle Energie | Josef M. Gaßner](#). YouTube. 2016. (Besucht am 01.03.2026).
- [28] Thomas Bührke. [Das beschleunigte Universum](#). spektrum.de. 2011. (Besucht am 01.03.2026).
- [29] Matthias Bartelmann. [Kosmischer Schall und die Krümmung des Raums](#). Einstein Online. (Besucht am 12.02.2026).
- [30] Wikipedia. [Baryon](#). (Besucht am 26.02.2026).
- [32] LEIFI Physik. [Dunkle Materie und Dunkle Energie](#). (Besucht am 01.03.2026).
- [33] [Neue Daten von Euclid: Stimmt das kosmologische Prinzip wirklich?](#) ingenieur.de. (Besucht am 01.03.2026).
- [34] Wikipedia. [Lambda-CDM-Modell](#). (Besucht am 01.03.2026).
- [35] Andreas Müller. [w-Parameter](#). Lexikon der Physik (Spektrum). 2014. (Besucht am 01.03.2026).
- [36] Wikipedia. [Nullpunktsenergie](#). (Besucht am 08.02.2026).
- [37] Gero Wasmuth. [Expansion des Universums: Wie beeinflusst dunkle Energie die Expansion des Universums und was steckt dahinter?](#) Seminarfacharbeit. Greselius-Gymnasium Bramsche. 2024. (Besucht am 15.02.2026).
- [38] Quarks Dimension Ralph. [Vakuum: Wie viel wiegt das NICHTS? | Quarks Dimension Ralph](#). 2025. (Besucht am 07.02.2026).
- [39] Quarks Dimension Ralph. [Dunkle Energie: Gibt es sie wirklich? | Quarks Dimension Ralph](#). 2024. (Besucht am 07.02.2026).
- [40] Englische Wikipedia. [Cosmological constant problem](#). Sprache: Englisch. (Besucht am 02.03.2026).
- [42] videowissen. [Kosmologische Konstante • Beschleunigte Expansion & keine "feste" Konstante | Harald Lesch](#). YouTube. 2025. (Besucht am 10.02.2026).
- [43] Wikipedia. [Quintessenz \(Physik\)](#). (Besucht am 02.03.2026).

- [44] Andreas Müller. [Quintessenz](#). Lexikon der Astronomie (Spektrum). 2014. (Besucht am 02.03.2026).
- [45] Andreas Müller. [f\(R\)-Gravitation](#). Lexikon der Astronomie (Spektrum). 2014. (Besucht am 01.03.2026).
- [46] Wikipedia. [Anthropisches Prinzip](#). (Besucht am 04.03.2026).
- [47] Roberto Trotta und Glenn Starkman. [Anthropisches Prinzip unter Beschuss](#). 2006. (Besucht am 02.03.2026).
- [50] esa. [Euclid - Exploring the dark Universe](#). Sprache: Englisch. (Besucht am 10.02.2026).
- [51] NASA. [Nancy Grace Roman Space Telescope](#). Sprache: Englisch. (Besucht am 01.03.2026).
- [52] Albert Einstein. [Probleme kann man niemals mit derselben Denkweise lösen, durch die sie entstanden sind](#). POETEUS. (Besucht am 01.03.2026).
- [53] Franziska Konitzer und Christof Wetterich. [Hubble-Konstante bleibt rätselhaft. \[Audio-Podcast\]](#). Welt der Physik, Dez. 2024. (Besucht am 03.03.2026).
- [54] David J. Jeffery. [A Note the Exact Solution of the Cosmic Scale Factor \$a\(t\)\$ for the \$\Lambda\$ -CDM Model](#). Sprache: Englisch. University of Las Vegas. (Besucht am 04.03.2026).
- [56] How to Physics. [ART Lektion 7.1 - Kosmologisches Prinzip und Herleitung der Friedmann Gleichungen mit der ART](#). YouTube. 2020. (Besucht am 15.02.2026).
- [57] Think Logic. [Kinetische Energie & Arbeit - Herleitung, Formel, Kurvenintegral \(Physik\)](#). 2023. (Besucht am 27.02.2026).
- [58] M. Realdi und G. Peruzzi. [Einstein, de Sitter and the beginning of relativistic cosmology in 1917](#). Sprache: Englisch, Zur Verfügung gestellt durch Bibliothek der Harvard University, auf Anfrage kann der Benutzercode geteilt werden. Gen Relativ Gravit. 2009. (Besucht am 26.02.2026).
- [59] Wikipedia. [De-Sitter-Modell](#). (Besucht am 26.02.2026).
- [60] Kate Croudace und Marcel Schmittfull. [The Origins of the Universe: Inflation](#). Sprache: Englisch. University of Cambridge. (Besucht am 28.02.2026).
- [61] Wikipedia. [Expansion of the universe](#). Sprache: Englisch. (Besucht am 28.02.2026).
- [62] Werner Lange. [Die Rolle der Hubblesphäre für die Umkehrung des Rezessionsverhaltens von Galaxien und Photonen im Standardmodell der Kosmologie \(\$\Lambda\$ CDM-Modell\)](#). Abbildung auf S. 26. viXra.org. 2026. (Besucht am 26.02.2026).

7.7.3 Quellen aus Nutzung generativer künstlicher Intelligenz

- [10] Google. [Konversation mit Gemini](#). Modell: Gemini AI 3.0. Prompts:
Prompt A: „Erkläre Rotverschiebung möglichst kurz in Zusammenhang mit der Entdeckung der Expansion durch Edwin Hubble 1929.“,
Prompt B: „Erkläre den Zusammenhang zwischen Geometrie und Expansion des Universums.“,
Prompt C: „Leite die zweite Friedmann-Gleichung vollständig her.“,
Prompt D: „Das Lemaitre-Modell hat drei Phasen. In welcher davon befinden wir uns heute?“,
Prompt E: „Ich bin aktuell bei dem Teil, wo ich die kosmologische Konstante eingeführt habe. Um überleiten zu können fehlt mir aber die Instabilität. Ich habe

damit bereits angefangen, aber weiß nicht wie ich den Übergang schön hinbekomme. Gib mir mehrere vorschläge was nach meinem für die Instabilität gesagt werden kann.“,

Prompt F: „Was ist ein inhomogenes skalarfeld (für Quintessenz in einer Fußnote)?“,

Prompt G: „Gib mir bitte ein paar Optionen der anderen Interpretation von Dunkler Energie zur Lösung der Probleme die durch Lambda entstehen.“,

Prompt H: „Bitte gib mir eine Zusammenfassung der kosmologischen Gleichungen aus dem Lambda-CCM Modell und die Gesamtgleichung.“

Die Antworten auf die gestellten Prompts finden sich einzeln in diesem [Google Dokument](#). (Besucht am 08.02.2026).

- [55] Open-AI. [Konversation mit ChatGPT](#). Modell: Chat-GPT 4.0. Prompt: "Leite die Friedmann-Gleichungen Schritt für Schritt her. Achte auf einfache Herangehensweise und verständliche Sprache."
Die Antworten auf die gestellten Prompts finden sich einzeln in diesem [Google Dokument](#). (Besucht am 08.02.2026).

7.8 Abbildungsverzeichnis

1	Ballon-Modell des Universums (Quelle: [60])	5
2	Geometrien des Universums (Quelle: [17])	7
3	Lemaître-Modell (Eigene Anfertigung. In Anlehnung an [23])	9
4	Friedmann-Modelle (Eigene Anfertigung. In Anlehnung an [61])	11
5	ΛCDM-Modell (Eigene Anfertigung. In Anlehnung an [61])	13
6	Vermessung der Krümmung des Universums (Quelle: [29])	13
7	Anteile an Gesamtdichte (heute) (Eigene Darstellung.)	14
8	Entwicklung der Anteile an Gesamtdichte im ΛCDM-Modell (Quelle: [62])	15

Danksagung

Zuerst danke ich meinem Algorithmus auf YouTube. Die Idee, mich mit diesem Thema zu befassen, kam durch ein [Kurzvideo](#) eines Interviews mit [Neil deGrasse Tyson](#), einem der wohl größten Astrophysiker der Gegenwart. Er sprach dort von „Einstein’s Biggest Blunder“ (*zu Deutsch so viel wie „Einsteins Größter Fehler“*). Zwar war dieses Video wissenschaftlich vollkommen ungeeignet für die Bearbeitung dieses Themas, war aber der Urknall einer schnell expandierenden Faszination. Die Verfügbarkeit der alten Seminarfacharbeiten auf der [Website des Astrogartens Bramsche](#) war ebenfalls sehr hilfreich.

Es ist verrückt, was die Technik heute alles kann; Ohne die heilige KI wäre meine Facharbeit nicht das, was sie jetzt ist. Rückfragen und Verdeutlichungen waren noch nie so einfach wie jetzt.

Gerade zur Benutzung von L^AT_EX war dies durchaus hilfreich. Nahezu alle Fragen konnten so spielend leicht geklärt werden. Größere Probleme traten daher durch die Bearbeitung dieses Dokuments nicht auf.

Auch möchte ich meinen Freunden und meiner Familie für den stetigen Zuspruch danken: auch in Zeiten, in denen mal viele Tränen geflossen sind. Danke, dass ihr teilweise genauso spät angefangen habt, wie ich!

Der größte Dank gilt jedoch unserem Seminarfachlehrer Florian Riemer. Es ist Ihnen gelungen, ein Seminarfach anzubieten, das eine kleine Faszination in mir geweckt hat. Danke für die Antworten um drei Uhr nachts, wenn ich wieder einmal dachte, ich bekomme das alles nicht mehr hin, und vielen Dank für die Betreuung meiner ersten wissenschaftlichen Arbeit. Möge sie nicht die letzte bleiben⁵⁶!

⁵⁶Diese Facharbeit ist teils zu sehr späten Zeiten entstanden. Ich entschuldige mich für jegliche sentimental und schnulzigen Formulierungen.

ERKLÄRUNGEN

Erklärung zur selbstständigen Anfertigung dieser Facharbeit

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbstständig angefertigt, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt und die Stellen der Facharbeit, die im Wortlaut oder im wesentlichen Inhalt aus anderen Werken (auch aus dem Internet) entnommen wurden, mit genauer Quellenangabe kenntlich gemacht habe. Verwendete Informationen aus dem Internet sind nach Absprache mit der Fachlehrerin bzw. dem Fachlehrer vollständig im Ausdruck zur Verfügung zu stellen.



Bramsche, den 5. März 2026

Unterschrift (Justus Vonstrohe)

Erklärung zur Veröffentlichung dieser Facharbeit

Hiermit erkläre ich, dass ich damit einverstanden bin, wenn die von mir verfasste Facharbeit der interessierten Öffentlichkeit zugänglich gemacht wird.



Bramsche, den 5. März 2026

Unterschrift (Justus Vonstrohe)

Kontakt für Rückfragen:

Justus Vonstrohe · Friedrichstraße 53 · 49565 Bramsche

E-Mail: justus.vonstrohe@greselius.net